30. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Теорема о наложении частных решений.

**Линейным называется** дифференциальное уравнение **n-го порядка**, если оно 1-ой степени относительно искомой функции http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image001_4_e2760f8260a9de4be14f37e59c1fcaad.png и ее производных http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image002_5_e3a4a53147279e9b9c07f9703aafff36.png, то есть имеет вид:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image003_5_f0facad443dae55b9df574f4233d07f2.png. **(8.40)**

Если коэффициент http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image004_5_bc1dd8ccb3140721c4278b26bd56ce20.png, то на него можно поделить и после соответствующих переобозначений получить:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image005_5_845fbf814db1c59baf441b3a08861171.png. **(8.41)**

Уравнение (8.41) называется **уравнением с переменными коэффициентами**. Предположим, что в нем функции http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image006_4_412907a18f1ae48953d2940862aae817.png, гдеhttp://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image007_3_bd9286c1c9f5c0a3029dabfe51c692c9.png, непрерывны на интервале http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image008_5_31a24ef7ed2028be9254647d28a154f8.pnghttp://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image009_3_6bf43f38d345e08c061b9a27a1fc997d.png. Тогда для уравнения (8.41) на данном интервале имеет место задача Коши, сформулированная нами ранее.

Замечание. Частным случаем (8.41) является линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image010_5_2799e4f9afbf11a217038f3036a4a060.png **(8.42)**

Если в уравнении (8.41) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image011_4_9174cd465e3fafd3ace8558ac6cef760.png, то уравнение называется **однородным**, если http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image012_5_6c69cc21c16b17eebd0369f6427d0644.png, то **неоднородным**.

**Теорема** **8.3 (о структуре общего решения линейного неоднородного ДУ).** Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image013_5_168cdaf98a403bcb9b7b19954fb06fab.png. Запишем коротко: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image014_4_b0b21b8a368535163fbb3f3869e7232a.png

Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (8.41), имеет вид:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image015_5_abadade6d382dcd2b7b8626a841407d0.png. **(8.43)**

Пусть в уравнении (8.43) функции http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image016_5_71f556136cb2eccd6332986aeb96b989.png. Тогда оно принимает вид: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image017_4_108d482a27546fa6d18a413b6732227a.png **(8.44)**

и называется линейным **однородным дифференциальным*****уравнением*n-го порядка с постоянными коэффициентами**, где http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image018_5_ecd1f52a292ea82af8c8131785fa1fe7.png– функции, n раз дифференцируемые.

Рассмотрим решения уравнений (8.43) и (8.44). Обозначим полную совокупность их линейно независимых решений через http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image018_5_ecd1f52a292ea82af8c8131785fa1fe7.png. Тогда, по свойству решений однородного уравнения, их линейная комбинация также является решением уравнения (8.43) и (8.44), т. е. общее решение может быть записано в виде: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image019_4_da757e774004d74e54615bf469081f69.png,**(8.45)**

где http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image020_4_5c35a4567b3b4a4e93184d1e9dddc30b.png– константы интегрирования.

Перейдем к конструированию функций http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image018_5_ecd1f52a292ea82af8c8131785fa1fe7.png. Какого они вида? Так как эти функции в уравнениях (8.43) и (8.44)*n* раз дифференцируемы, то их конструкция при дифференцировании не меняется. Это возможно в случае экспоненциального вида функций, то есть при http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image021_4_2eb7f941976b494579c168beb8b22983.png, **(8.46)**

где http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image022_3_f27521c8bdb1ef2a49066e2297056695.png, http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image023_3_142d4038f2cf136236ed11be86eb7e58.png. Отсюда, линейная комбинация функций (8.46): http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image024_3_35b5a6faf90e76939c1b57044e43a159.png –**(8.47)**

также решение уравнений (8.43) и (8.44).

Рассмотрим одну из функций (8.46) – функцию http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image025_3_4def50d4a2aacc73c8e3de40b53c1ea0.png как решение для уравнения (8.44) с постоянными коэффициентами. Продифференцируем ее *n* раз: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image026_3_9161e3bf149476be234b8c82b10cce2b.png

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image027_3_6bdea6952b92847e6737ce928b952435.png

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image028_3_8e2b32356682e9b3da370a73512b6140.png

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image029_3_82122a13fcbe457545dc6f9f6a5a0248.png. По определению решения дифференциального уравнения при подстановке http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image025_3_4def50d4a2aacc73c8e3de40b53c1ea0.png и ее производных в (8.44) имеем тождество: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image030_3_d7d1270428bf40e891416dba3bb863e3.png. После вынесения общего множителя http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image031_3_230c559476458a767037f353d5317512.pngполучаем:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image032_3_ff8171751e987e5bbff6a2da81861f39.png.

Так как http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image033_3_58ec472dfde320019cbda1b8447069ef.png, то

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image034_3_c2df46708f6e6086c407f05f50d744e0.png– (**8.48)**

алгебраическое уравнение *n*-ой степени относительно http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image035_3_ed2629b03536dc1244a14faa7ad9830d.png, называемое ***характеристическим уравнением*** для уравнения (8.44). Известно, что уравнение *n*-ой степени имеет равно *n* корней как действительных, так и комплексных, с учетом их кратности. Значит, характеристическое уравнение (8.48) дает нам *n* значений числа http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image035_3_ed2629b03536dc1244a14faa7ad9830d.png, ранее обозначенных нами через http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image036_3_c6039b59d802dd3e45825ab8be768442.png, которые при подстановке в (8.47) приводит нас к окончательному виду общего решения линейного однородного дифференциального уравнения (8.44) с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим наиболее распространенный частный случай уравнения (8.44) – его аналог 2-го порядка:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image037_3_3dd97c47f26fbcbcbfbb279188e68951.png. **(8.49)**

Для данного уравнения характеристическое уравнение (8.48) принимает вид:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image038_3_23d635d79dc95faee2c89235e4fc6c54.png. **(8.50)**

Уравнение (8.50) является квадратным относительно http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image035_3_ed2629b03536dc1244a14faa7ad9830d.png. В зависимости от его дискриминанта http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image039_3_94ff350f0facba1298768a8d7e56145a.png рассматривают три случая.

1) При http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image040_3_241b89dac09446ee506f19b9463d7651.png корни характеристического уравнения (8.50) – вещественные различные числа (http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image041_2_17786acf13423041bbafefd81a82974e.png), и общее решение уравнения (8.49) имеет вид: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image042_2_9ee1bdea693f556e4124d69b1bb1e893.png. **(8.51)**

2) При http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image043_2_40c43dacf4985793039f538492d42aa4.png корни характеристического уравнения (8.50) – вещественные равные числа (http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image044_2_58af4ad391b508890f1da904dbb377fd.png), и общее решение уравнения (8.49) имеет вид: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image045_3_2fbf61748eae8261e759f527f3db6cc9.png. **(8.52)**

3) При http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image046_3_6f401e843a9fd38ecef99d544a9d3cdb.png корни характеристического уравнения (8.50) – комплексные сопряженные числа http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image047_2_c1ef16885946a2557ee4080a093616e4.png, http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image048_2_e868365079da73697084a255983840a1.png, и общее решение уравнения (8.49) имеет вид: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image049_2_0fc820b61cdc1fedd637c26dfa082748.png. **(8.53)**

**Пример 8.10.**Найти общее решение уравнений:

а) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image050_2_1246dfe453ae4d4aa4c11a22ed8bfac5.png б) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image051_2_36183824aeef6d1cbcb9c293cddad08c.png

в) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image052_2_2434e599b180f4531cb35de5e1f8e518.png г) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image053_2_eeacd4e911f9de4f047f1f8b66520efc.png

*Решение.*

а) Составляем характеристическое уравнение http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image054_2_36e7614e608a56f602cf4c9def42d9ae.png. Корнями этого уравнения будут http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image055_2_01114fc2f55d9221d22427d7d97d115a.png и http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image056_2_269de897d7128d5c3ca6cb65b0cff06a.png. Тогда, применяя (8.51), получаем общее решение: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image057_2_52fad487828f559faaea0c9cfb3a14a6.png.

б) Составляем характеристическое уравнение http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image058_2_6c1cb0ac699f61563cb0846ff68e6c75.png.

Решая это уравнение, получим http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image059_2_37dfdedc601c2a1c5f60aa38a1b32c3d.png. Так как корни равные, то, применяя (8.52), будем иметь: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image060_2.png.

в) Характеристическое уравнение http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image061_2.png имеет комплексные корни:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image062_2.png и http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image063_2.png. Положив в (8.53) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image064_2.png, получим общее решение: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image065_2.png.

г) Характеристическое уравнение http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image066_2.png имеет корни http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image067_2.png и http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image068_2.png.

Полагая в (8.53) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image069_2.png, получим общее решение: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image070_2.png

Рассмотрим теперь линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image071_2.png, **(8.54)**

являющееся частным случаем уравнения (8.42). Функция http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image072_2.png может представлять собой функцию специального вида. Тогда общее решение уравнения находится с помощью следующей теоремы.

**Теорема 8.4.**Пусть задано линейное дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image073_1.png. **(8.55)**

1. Если http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image074_2.png не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение уравнения (8.55) имеет вид: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image075_1.pnghttp://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image076_2.png, **(8.56)**

где http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image077_2.png; http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image078_2.png и http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image079_2.png – многочлены общего вида (с неопределенными коэффициентами).

2. Если http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image080_2.png – корень характеристического уравнения кратности http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image081_1.png, то частное решение уравнения (8.55) имеет вид: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image082_2.pnghttp://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image083_2.png, **(8.57)**

где http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image077_2.png; http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image078_2.png и http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image079_2.png – многочлены общего вида (с неопределенными коэффициентами) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image084_1.png

Рассмотрим частные случаи данного уравнения.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вид правой части | Корни характеристического уравнения | Вид искомого частного решения уч. н. |
| 1) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image085_2.pnghttp://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image086_2.png http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image087_2.png | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image088_2.png – не корень | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image089_2.png |
| http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image088_2.png – корень кратности *S* | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image090_2.png |  |
| 2) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image091_1.png | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image092_2.png – не корень | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image093_1.png |
| http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image094_1.png – корень кратности *S* | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image095_1.png |  |
| 3) http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image096_1.png | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image092_2.png – не корень | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image097_1.png |
| http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image035_3_ed2629b03536dc1244a14faa7ad9830d.png – корень кратности*S* | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image098_1.png |  |
| 4)http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image099_1.png | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image100_1.png – не корень | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image101_1.png |
| http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image102_1.png– корень кратности *S* | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image103_1.png |  |
| 5)http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image104_1.png | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image105_1.png – не корень | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image106_1.png |
| http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image107_1.png– корень кратности *S* | http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image108_1.png |  |

**Пример 8.11.** Найти общее решение уравнения http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image109_38110ac0f0d06bde7b01cf491c5b1ac5.png.

*Решение.* Найдем общее решение соответствующего однородного ДУ: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image110_0.png. Характеристическое уравнениеhttp://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image111_0.png имеет корень http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image112_0.png кратности 2. Значит, http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image113_0.png Находим частное решение исходного уравнения. В нем правая часть http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image114_0.png есть формула вида http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image115_0.png, причем http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image116_0.png, не является корнем характеристического уравнения: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image117_0.png. Поэтому согласно формуле (8.56), частное решение http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image118_0.png ищем в виде http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image118_0.png=http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image119_0.pnghttp://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image120_0.png, т. е. http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image118_0.png=http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image121_0.pngгде http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image122_0.png и http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image123_0.png – неопределенные коэффициенты. Тогда http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image124_0.png, http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image125_0.png.

Подставив http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image118_0.png, http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image126_0.png и http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image127_0.png в исходное уравнение, получим http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image128_0.png или http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image129_0.png. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image130_0.png, получим систему уравнений:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image131_0.png

Отсюда http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image132_0.png. Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image133_0.png. Следовательно, искомое общее решение уравнения http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image134_0.png

**Пример 8.12.** Решить уравнение http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image135_0.png.

*Решение.* Находим общее решение http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image136_0.pngсоответствующего однородного уравнения http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image137_0.png. Характеристическое уравнение http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image061_2.png имеет корни http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image138_0.png. Следовательно, http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image139_0.png.

Находим частное решение http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image118_0.png. Правая часть неоднородного уравнения в нашем случае имеет вид http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image140_0.png. Так как http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image141_0.png не совпадают с корнем характеристического уравнения, то согласно формуле (8.56), частное решение ищем в виде http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image142_0.png. Дифференцируем частное решение, получаем: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image143_0.png, http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image144_0.png. Подставляя http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image118_0.png и его производные в исходное уравнение, получаем:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image145_0.png или

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image146_0.png.

Отсюда, сравнивая коэффициенты при косинусе и синусе, имеем

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image147_0.png

Следовательно, http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image148_43eae5e6fa7d80f5eff318b77b99dd65.png. Поэтому http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image149_f100974c0a23a980ce8eae431218add4.png. И наконец, с учетом теоремы 8.3 получаем общее решение заданного неоднородного линейного ДУ в виде:

http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image150_869755b185dfed95cab49da7f5db85c9.png

**Теорема 8.5 (о наложении решений).**Если правая часть уравнения (8.54) представляет собой сумму двух функций: http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image151_7d1eefbbbabbf8f334ad2cab487e12fa.png а http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image152_d37c56ce9d66d7a9f005cf0c0354c17f.png и http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image153_f664bae43225fcae52591ca17bcca370.png – частные решения уравнений http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image154_a201c4243169929fb69f5ba6d7e5b26a.png и http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image155_c0f28ed2bb41148c25ccb46c1fbe0a00.png соответственно, то функция http://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image156_f15bc93f13a5a23f913a59cc00080673.png является частным решением данного уравненияhttp://po-teme.com.ua/images/adIIIin/image084_1.png

31. Системы дифференциальных уравнений. Основные определения.

**Система линейных дифференциальных уравнений** (СЛДУ) — система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является линейной относительно всех искомых функций y_{i}(x)  и их производных всех порядков. Такую систему можно преобразовать к линейной системе первого порядка канонического вида, которую обычно и определяют, как СЛДУ.

Если в системе n  дифференциальных уравнений имеется производная y_i^{(k+1)}, k>0  , то можно добавить новую искомую функцию y_{n+1}, определяемую новым линейным уравнением  y_i^{(k)} = y_{n+1} . Заменой y_i^{(k+1)}=y_{n+1}'  в остальных уравнениях производнаяy_i^{(k+1)}  исключается из системы. Последовательное выполнение этих операций для линейной системы приводит к линейной системе первого порядка. В линейной системе каждую производную можно подстановкой исключить из всех уравнений кроме одного. Поэтому систему линейных дифференциальных уравнений обычно определяют, как систему вида

y'_j=\sum^{n}_{k=1} {p_{jk}(x)y_k}+f_j(x), j=1,2,\dots, n

Если дано линейное дифференциальное уравнение порядка  n

y_0^{(n)}=\sum^{n-1}_{k=0} {p_{k}(x)y_0^{(k)}}+f_j(x) ,

то описанным выше способом его можно преобразовать в систему  n уравнений следующего вида


\begin{cases}y'_0 = y_1
\\y'_1 = y_2
\\ \cdots 
\\y'_{n-2}=y_{n-2}
\\ y'_{n-1}=\sum^{n-1}_{k=0} {p_{k}(x)y_k}+f_j(x)
\end{cases}

Общее решение однородной СЛДУ, получаемой приравниванием всех f_j(x)  к нулю даётся формулами

y_j=\sum^{n}_{k=1} {C_k y_{jk}(x)}

где y_{j1}, y_{j2},\dots, y_{jn} — линейно независимые частные решения однородной системы, то есть такие, что определитель ||y(x)_{ij}|| \neq 0   хотя бы в одной точке. В случае постоянных коэффициентов  p(x)_{jk}=a_{jk} частные решения однородной системы следует искать в виде

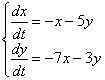
y_j(x)= (A_{j0}+ A_{j1}x+\dots+A_{jn_k-1}x^{n_k-1})e^{\lambda_jx}

где  A_{js} — неопределённые коэффициенты, \lambda_j — корни характеристического уравнения


\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}
\\a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}
\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots
\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda
\end{vmatrix} = 0  

и n_k  — кратность этих корней. Полный анализ всех возможных случаев производится методами линейной алгебры. Для решения СЛДУ с постоянными коэффициентами применяются также методы операционного исчисления.

**Метод характеристического уравнения (метод Эйлера)**

Дана линейная однородная система дифференциальных уравнений  


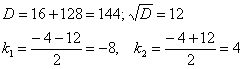
Найти общее решение системы уравнений с помощью характеристического уравнения

**Решение:** Смотрим на систему уравнений и составляем определитель второго порядка:  
http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image189.gif  
По какому принципу составлен определитель, думаю, всем видно.

Составим характеристическое уравнение, для этого из каждого числа, которое располагается на *главной диагонали*, вычитаем некоторый параметр http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image191.gif:  
http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image193.gif

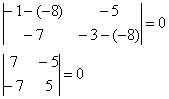
На чистовике, естественно, сразу следует записать характеристическое уравнение, я объясняю подробно, по шагам, чтобы было понятно, что откуда взялось.

Раскрываем определитель:  
http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image195.gif

И находим корни квадратного уравнения:  


Если характеристическое уравнение имеет **два различных действительных корня**, то общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:  
http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image199.gif

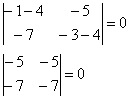
Коэффициенты в показателях экспонент http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image201.gif нам уже известны, осталось найти коэффициенты http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image203.gif

1) Рассмотрим корень http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image205.gif и подставим его в характеристическое уравнение:  
  
(эти два определителя на чистовике тоже можно не записывать, а сразу устно составить нижеприведенную систему)

Из чисел  определителя составим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:  
http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image209.gif

Из обоих уравнений следует одно и то же равенство:  
http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image211.gif

Теперь нужно подобрать *наименьшее* значение http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image213.gif, такое, чтобы значение http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image215.gif было целым. Очевидно, что следует задать http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image217.gif. А если http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image217_0000.gif, то http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image220.gif

2) Всё аналогично. Рассмотрим корень http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image222.gif и устно подставим его в характеристическое уравнение:  


Из чисел  определителя составим систему:  
http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image226.gif

Из обоих уравнений следует равенство:  
http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image228.gif

Подбираем *наименьшее* значение http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image230.gif, таким образом, чтобы значение http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image232.gif было целым. Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image234.gif.

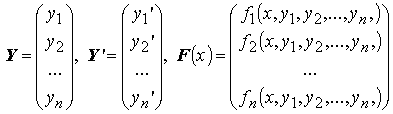
Все четыре коэффициента http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image203_0000.gif найдены, осталось их подставить в общую формулу http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image236.gif

**Ответ:** общее решение: http://www.mathprofi.ru/h/sistemy_differencialnyh_uravnenij_clip_image238.gif

32. Задача Коши для систем дифференциальных уравнений. Сформулировать теорему Коши.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений n–го порядка

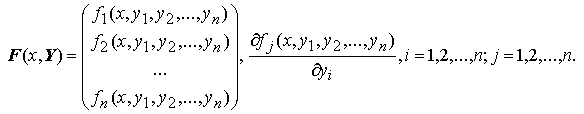
http://twt.mpei.ac.ru/math/ODE/img/ODEsys_0800000_4.GIF или http://twt.mpei.ac.ru/math/ODE/img/ODEsys_0800000_5.GIF



Задачей Коши для для этой системы называется следующая задача: найти такое решение **Y** = **Y**(x) системы **Y**' = **F**(x,**Y**), что **Y**(x0)=**Y**0, где **Y**0 — некоторый постоянный вектор.

Справедлива следующая теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

**Теорема Коши.**Пусть в области D из **R**n+1 непрерывны все компоненты вектора правой части ***F***(x,***Y***) и их частные производные по ***Y***:



Тогда, какова бы ни была начальная точка (x0,Y0) ≡ (x0,y1, 0 ,y2, 0, … ,yn, 0 ) ∈ D , существует такой отрезок [x0 − h; x0 + h] , что задача Коши   **Y**' =**F**(x,**Y**), что **Y**(x0)=**Y**0 имеет единственное решение.

Важно понимать, что теорема Коши имеет локальный характер: существование решения ***Y*** = ***Y***(x) гарантируется лишь в достаточно малой окрестности точки x0 , ( h > 0 может оказаться достаточно малым).

Важно также понимать, что теорема содержит только достаточные условия существования и единственности решения — при нарушении условий теоремы задача Коши может иметь или не иметь решений, может иметь несколько решений.